Formula Polynomiorum.

En almindelig Formel for Coefficienterne udi Polynomier.

Af

J. N. Tetens.

Forerindring.

Den almindelige Regel for Coefficienterne af Polynomier har været en Gienstand af Speculationen for de største Mathematiker. Hvad Leibniz, Brødrene Jacob og Johan Bernoulli, Moivre, Euler, Kästner, Schönberg, og tilsidst Hr. Professor Hindenburg have opfundet desangaaende, findes samlet udi den sidstnævntes Skrivt: Infinitinomii dignitatum exponentis indeterminati Historia, Leges ac Formulæ. Edit. alt. Göttingæ 1779. Den Eulerske, og udi dens fulde Almindelighed af Hr. Hofraad Kästner beviste, Formel er bare analytisk, men angiver de efterfølgende Coefficienter kun medens deres foregaaende, og ei enhver for sig allene udenfor sin Orden. Hr. Professor Hindenburg har viist hvorledes samme erholdes hvert for sig ved Combinationsmethoden; men den Formel, som han giver, indeholder ikke Coefficienterne selv analytisk, det er, saaledes, at der blot udfordres analytiske Operationer for at erholde den, eller blot analytiske Substitutioner. Formelen angiver mere de combinatoriske Operationer, hvorved Coefficienterne opfindes; derfor ogsaa Combinationsmethoden forudsættes som bekiendt for dem, der efter en saadan Formel vil opsøge Coefficienterne.

Sandt nok, at denne Methode er nu reduceret til nogle simple og almindelige Grundsætninger, og man kan nok antage dem blandt de andre analytiske Operationer, ligesaavel som man har giort det ved Differentieringen og Integreringen. At den samme Methode er meget brugbar hos adskillige andre analytiske Problemer, er ogsaa beviist; men alligevel bestaaer den udi en egen og af andre analytiske Operationer særskilt Omgangsmaade ved Størrelsen, som man gierne vilde undgaae, naar den kunde undgaaes. Paa Grund deraf har jeg troet, at det kunde endnu blive Umagen værd, og et Slags Udvidelse af Analysis, at opfinde en blot analytisk Formel, hvorved Combinationer ikke mere behøves. En saadan Formel er den, jeg her fremsætter. Naar man bruger samme udi dens første Indretning, saa udfordres der endnu Substitutioner eller Evolutioner; thi Coefficienterne, som søges, kan indbefatte en større Mængde af heterogene Producter, hvoraf kun nogle angives umiddelbar, og de øvrige, saa at sige, samlede under visse Classer; men for at faae dem alle enkelt, kan disse Samlinger eller Classer udvikles ved Substitutionen efter den samme almindelige Formel, uden at dertil behøves en anden Slags Operationer end bare analytiske.

§. 1.

Der gives tvende Slags Polynomier, jeg her vil handle om. Det første er af følgende Form, $(a + bx + cx^2 + + qx^r)^n$ eller $(ax + bx^2 + cx^3 + + qx^{r+1})^n$, og slige, hvorudi Delene skilles fra hinanden og følger hinanden efter Potentserne af en foranderlig Størrelse x. Coefficienterne til de Potentser af x ere det der skal angives. Samme kan indeholde saa mange enkelte Dele eller Producter som man vil, saa bliver disse alle anseet som en enkelt Coefficient. Sættes $(a + bx + cx^2 + + qx^r)^n = A + Bx + Cx^2 + + Qx^r$, saa ere A, B, C...Q Coefficienterne af det Polynomium, hvorom tales.

Polynomier af den Form $(ax + bx^2 + cx^3 + + qx^{r+1})^n$, hvori der ingen Coefficient haves af x^0, reduceres meget let til de af den Form $(a + bx + cx^2 + + qx^n)^n$. Derfor kan den første her antages som den almindelige.

Det andet Slags Polynomier angives ved Formelen $(a + b + c + + q)^n$. Udi disse ansees for adskillige heterogene Dele, de Producter, som

som indeholder andre Factorer, eller samme Factorer i andre Potentser. Factorer ere altid de udi det givne Polynomium a, b, c.... Den Orden, hvori Delene følge paa hinanden, bestemmes efter den Orden af Bogstaverne a, b, c... og af sammes Potentser: f. Ex. a^n er det første Product, hvorpaa $a^{n-1}b$ følger; derefter $a^{n-1}c$, $a^{n-1}d$ o. s. v. indtil Enden af den, som indeholder a^{n-1}; og derpaa følger $a^{n-2}b^2$, $a^{n-2}bc$, $a^{n-2}bd$ o. s. v.

§. 2.

Det Polynomium $a + bx + cx^2 + + qx^r$, hvis Coefficienter antages som given, ligeledes $a + b + c + + q$ kaldes oprindelige Polynomier (series fundamentalis).

Udi Polynomier, som ere Producter af andre, af Formen $(a + bx + cx^2 + + qx^r)^n . (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + + \varkappa x^t)^\nu$ gives der tvende oprindelige Polynomier. Ligeledes udi de af Formen $(a + b + c + + q)^n . (\alpha + \beta + \gamma + + \varkappa)^\nu$.

§. 3.

For at erholde en mere beqvem Form for terminus generalis af Coefficienterne udi det Polynomium $(a + bx + cx^2 + +)^m$, kan antages, at der altid gives udi det oprindelige Polynomium saa mange Dele som Ordenstal (numerus termini) af Coefficienten angiver. F. Ex. naar den nte Coefficient, som hører til x^{n-1}, skal haves, saa bliver der forudsat n Dele udi det oprindelige Polynomium. Hvor det sidste er et infinitum, da haves virkeligen saa mange Dele; hvis ikke, saa kan de som mangler fingeres, og derfor sættes Nuller. Skal man f. Ex. angive den 6te Coefficient udi $(a + bx + cx^2 + dx^3)^4$, der hører til x^5, saa kan det oprindelige Polynomium antages at være $a + bx + cx^2 + dx^3 + ox^4 + ox^5$. Saaledes bliver numerus termini af Coëfficienten, som skal angives eengang for alle, den samme med Antallet af Delene udi det Stykke af det oprindelige Polynomium, som kan bruges til hiins Betegnelse.

De første og bestemt angivne Coefficienter af det oprindelige Polynomium $a + bx + cx^2 + +$ betegnes med a, b, c... selv; de sidste, som kun ubestemt skal angives, f. Ex. den nte, kan betegnes med numerus termini n med en liden Forandring, saasom $[n]$. Saaledes bliver $[n]$ den nte Coefficient, $[n-1]$ den $(n-1)$te, o. s. v.

Og paa denne Maade kan den terminus generalis af Coefficienterne, eller den nte Coefficient udi det Polynomium $(a + bx + cx^2 + + + [n]x^{n-1} + + +)^m$ angives ved et Stykke af det oprindelige Polynomium, som gaaer til den nte Coefficient af samme (iberegnet den sidste), med Tilskrivning af Potentsen m, og naar der sættes for samme et T, saaledes: $T(a + bx + cx^2 + + [n]x^{n-1})^m$. Dette Udtryk kan endnu afkortes. Da de Potentser af x, som hører til de Coefficienter, hvis numerus termini ere given, af sig selv ere bekiendte, saa kan isteden derfor sættes $T(a + + [n])^m$. Der behøves kun at angive den første og den sidste Coefficient af det oprindelige Polynomium, da de imellem dem faldende haves desuden.

Naar $m = 1$, saa er $T(a + + [n])$ selv n, eller den nte Coefficient til x^{n-1} udi det oprindelige Polynomium.

Efter samme Regel er $T(b + + [n])^m$ den Coefficient udi Polynomium $(b + cx + dx^2 + + [n]x^{n-2})^m$, hvis numerus termini er den samme med Antallet af Delene udi $b + cx + dx^2 + + [n]x^{n-2}$.

§. 4.

Sætning 1.

Naar den Række $a + bx + cx^2 + + [n]x^{n-1}$ multipliceres med den anden $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + + [\nu]x^{n-1}$, saa bliver den nte Coefficient, det er, den tilhørende til x^{n-1} udi Producten $(a + bx + cx^2 + + [n]x^{n-1})$. $(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + + [\nu]x^{n-1})$, Summen af Producterne, som faaes ved at multiplicere den første Coefficient i den ene Factor med den nte i den anden; den anden af hiin Factor med den $(n-1)$te af denne, og saa videre, den næstfølgende udi af den ene Factor med den næstforegaaende udi af den anden; eller, de første n Coefficienter udi af den ene Factor med de i en omvendt Orden tagne n første af den anden, een af hiin med een af denne.

Under

$$\begin{array}{lcccccccc} \text{Under} & a, & b, & c & \ldots & [n-2], & [n-1], & [n] \\ \text{skrives} & [\nu], & [\nu-1], & [\nu-2] & \ldots & \gamma, & \beta, & \alpha, \end{array}$$

og tages Summen af Producterne $\left.\right\}$ $a[\nu] + b[\nu-1] + c[\nu-2] + + [n-2]\gamma + [n-1]\beta + [n]\alpha$,
saa har man den søgte nte Coefficient udi Producten.

Beviis. Det er en umiddelbar Følge af Operationen, naar den multipliceres:

$$a + bx + cx^2 + + [n-1]x^{n-2} + [n]x^{n-1}$$

med $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + + [\nu-1]x^{n-2} + [\nu]x^{n-1}$;

thi Coefficienten af x^{n-1}, eller den nte udkommer.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha[n] \\ + \ \beta[n-1] \\ + \ \gamma[n-2] \\ + \\ + \\ + \ [\nu-1]b \\ + \ [\nu]a \end{array}\right\} x^{n-1}.$$

Bemerkning. Coefficienterne udi den ene eller udi den anden af Factorerne kan være Nuller. Den almindelige Sætning bliver den samme; men blandt de enkelte Producter gives der i saadant Fald Nuller. F. Ex. der skal findes Coefficienten til x^7 udi Productet $(a + bx + cx^2 + dx^3) . (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)$ eller udi Productet $(a + bx + cx^2 + dx^3 + ox^4 + ox^5 + ox^6 + ox^7)$ med $(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + ox^5 + ox^6 + ox^7)$;

$$\begin{array}{lcccccccc} \text{saa har man} & a, & b, & c, & d, & o, & o, & o, & o \\ \text{og} & o, & o, & o, & \varepsilon, & \delta, & \gamma, & \beta, & \alpha; \end{array}$$

derfor bliver $d\varepsilon$ Coefficienten af x^7, eller den ottende i alt.

For at finde den 5te Coefficient har man

$$\begin{array}{lccccc} & a, & b, & c, & d, & o \\ \text{og} & \varepsilon, & \delta, & \gamma, & \beta, & \alpha; \end{array}$$

saa bliver samme $a\varepsilon + b\delta + c\gamma + d\beta + o\alpha$.

§. 5.

§. 5.

Sætning 2.

Den nte Coefficient udi Qvadraten $(a + bx + cx^2 ++ [n]x^{n-1})^2$ eller $T(a ++ [n])^2$ (§. 3.) er den dobbelte Summe af Producterne af de begge yderste blandt de første n Coefficienter udi det oprindelige Polynomium, og af ethvert Par af denne, som er lige frastaaende fra den første og fra den nte, med Tillæg af Qvadraten af den mellemste, naar n er et ujevnt Tal. Det er: $T(a ++ [n])^2 = 2a[n] + 2b[n-1] + 2c[n-2] ++ g^2$, naar g er den mellemste imellem a og [n].

Beviis. Efter den første Sætning (§. 4.) faaes den nte Coefficient ved Multiplication ud af

$$\begin{array}{rcccccc} & a, & b & \ldots\; g \;\ldots & [n-1], & [n] \\ \text{og} & [n], & [n-1] & \ldots\; g \;\ldots & b, & a, \\ \hline \end{array}$$

og den bliver da $a[n] + b[n-1] ++ gg ++ [n-1]b + [n]a$
eller $2a[n] + 2b[n-1] ++ g^2$.

§. 6.

Folge 1. Skal den nte Coefficient være selv den første, eller [n] selv a; saa bliver samme a^2. Derfor $T(a)^2 = a^2$.

Folge 2. Paa samme Grund er $T(b ++ [n-1])^2 = 2b[n-1] + 2c[n-2] ++$. Men her haves den nte Coefficient udi Qvadraten $(b + cx + dx^2 ++ [n-1]x^{n-1})^2$.

Bemærkning. Coefficienterne i $a + bx + cx^2 ++$ kan skrives paa et Stykke Papir i deres Orden, og i omvendt Orden paa et andet Stykke, med Tilsætning af Nuller bag efter eller foran, saa mange man vil. Disse begge Stykker lægges under hinanden paa den Maade, at under den nte paa det ene Stykke kommer den første paa det andet. Saaledes har man strax de enkelte Producter, som ere udi den nte Coefficient. F. Ex. naar det oprindelige Polynomium er $a + bx + cx^2 + dx^3$, saa skrives

paa

paa et Stykke Papir A

a	b	c	d	o	o	o

paa et andet Stykke B

o	o	o	d	c	b	a

For at faae f. Ex. den 7de Coefficient, lægges under den 7de paa A, som her er et Nul, den første af B, nemlig a, og Multiplicationen giver dd.

For den femte Coefficient saaledes:

		a	b	c	d	o	o	o
o	o	o	d	c	b	a		

og da bliver samme $2bd + cc$.

Men Coefficienterne udi Qvadraten findes desuden saa let, at samme hver Gang kan ansees som given. Derfor ogsaa $T(a ++ [n])^2$ som given uden nogen videre Substitution eller Exposition.

§. 7.
Sætning 3.

$T(a ++ [n])^2 = 2a[n] + T(b ++ [n-1])^2$, det er, den nte Coefficient udi Qvadraten $(a + bx + cx^2 ++)^2$ indeholder Producten $2a[n]$ med Coefficienten udi $(b + cx + dx^2 ++)^2$, nemlig udi Qvadraten af det oprindelige Polynomium, naar dens første Deel er fradragen, og den øvrige divideret med x. Numerus termini af den sidstomtalte Coefficient $T(b ++ [n-1])^2$ er lige med Antallet af Coefficienterne udi $b + cx + dx^2 ++ [n-1]$. Den er derfor den $(n-2)$te udi Qvadraten $(b + cx + dx^2 ++)^2$.

Beviis. Efter §. 5. er $T(a ++ [n])^2 = 2a[n] + 2b[n-1] + 2c[n-2] ++$ Men $2b[n-1] + 2c[n-2] ++ = T(b ++ [n-1])^2$.

Følge 1. Ligesom $T(a ++ [n])^2$, naar $[n]$ skal være det samme med a, eller $T(a)^2$ bliver $= a^2$, saa bliver ogsaa $T(b ++ [n-1])^2 = b^2$, naar $[n-1]=b$. Derfor har man $T(a+b+c)^2 = 2ac + T(b++[n-1])^2 = 2ac + b^2$, fordi her er $[n]=c$, og $[n-1]=b$.

Følge 2. For enhver Potents af Exponenten m har man $T(a++[n])^m = a^m$, naar $[n]$ skal være a. Ligeledes er $T(b++[n])^m = b^m$, naar $[n]=b$.

Bemærkning. Den anden Coefficient udi $(a+bx+cx^2++)^m$, eller $T(a+b)^m$, er efter Binomialformelen $ma^{m-1}b$. Det samme sees i det følgende, som en Consequents af Polynomialformelen.

§. 8.

Sætning 4.

Den almindelige Formel for den nte Coefficient udi Polynomium $(a+bx+cx^2++)^m$ bliver følgende:

$$T(a++[n])^m = ma^{m-1}[n] + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}T(b++[n-1])^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-3}T(b++[n-2])^3 +++$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(m-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m}a^{m-m}T(b++[n-(m-1)])^m.$$

Beviset skal gives i det følgende. Formelen gielder almindelig ligesom formula binomialis. Exponenten m kan være negativ og en Brøk.

§ 9.

Bemærkning 1. Formelen giver kuns den første Deel af den søgte Coefficient heel udviklet, nemlig Productet $ma^{m-1}[n]$. De øvrige Dele ere endnu selv termini generales af Coefficienterne, nemlig:

af den $(n-2)$te udi $(b+cx+dx^2++)^2$,
- - $(n-3)$te udi $(b+cx+dx^2++)^3$, o. s. v.
- - $(n-m)$te udi $(b+cx+dx^2++)^m$.

Be-

Bemærkning 2. Formelen endes hvor $a^{m-m} = a^0 = 1$, naar Exponenten m ere et heelt Tal. Men den endes ogsaa, naar numerus termini er saadan, at [n], eller [n—1] eller [n—2] o. s. v. indtil [n—(m—1)], i det oprindelige Polynomium $b + cx + dx^2 ++$ falder sammen med b; thi da $b + cx + dx^2 ++$ begynder udi b, saa ere de, som skulle være for b, Nuller. Og naar den $(n-m+1)$te Coefficient udi $a + bx + cx^2 ++$ skal være den første, nemlig a, saa bliver samme Nul udi $b + cx + dx^2 ++$.

Deraf følger ogsaa at den anden Coefficient udi $a + bx + cx^2 ++$ bliver altid $ma^{m-1}b$, som forhen er sagt; thi her er $[n] = b$, og $T(b ++ [n-1])^2 = 0$.

Bemærkning 3. Den videre Udvikling af Delene udi Formelen skeer efter den samme Formel ved Substitutioner; samme selv viser:

Exempel 1. At angive den fierde Coefficient (den til x^3) udi den femte Potents af $a + bx + cx^2 + dx^3 ++$.

Her er $m = 5$, $n = 4$;

$[n] = d$, $[n-1] = c$, $[n-2] = b$, $[n-3] = a$;

derfor $T(a ++ d)^5 = 5a^4 d + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} a^3 T(b + c)^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^2 T(b)^3$.

Nu ere $T(b)^3 = b^3$,

og $T(b + c)^2 = 2bc$;

derfor $T(a ++ d)^5 = 5a^4 d + 10 . 2a^3 bc + 10a^2 b^3$.

Exempel 2. Lad være $m = 5$, $n = 5$; saa bliver $[n] = e$, $[n-1] = d$, $[n-2] = c$, $[n-3] = b$, $[n-4] = a$; og $T(a ++ e)^5 = 5a^4 e + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} a^3 T(b ++ d)^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^2 T(b + c)^3 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a\, T(b)^4$.

Nu har man $T(b ++ d)^2 = 2bd + T(c)^2 = 2bd + c^2$;

$T(b + c)^3 = 3b^2 c$; (Resten ere Nul.)

$T(b)^4 = b^4$.

Deraf faaes $T(a ++ e)^5 = 5a^4 e + 10a^3(2bd + c^2) + 10 . 3a^2 b^2 c + 5ab^4$.

Exempel 3. Sættes $m = 5$, $n = 6$; og derfor $[n] = f$, $[n-1] = e$, o. s. v. Blandt disse første 6 Coefficienter, a, b, c, d, e, f, kan der gives Nuller.

$$T(a + + [n])^5 = 5a^4 f + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} a^3 T(b + + e)^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^2 T(b + + d)^3$$
$$+ \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a\, T(b + c)^4 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} T(b)^5$$
$$= 5a^4 f + 10a^3 T(b + + e)^2 + 10a^2 T(b + + d)^3$$
$$+ 5a\, T(b + c)^4 + T(b)^5.$$

Nu er $T(b + + e)^2 = 2be + 2cd$;

$$T(b + + d)^3 = 3b^2 d + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} b\, T(c)^2 = 3b^2 d + 3bc^2;$$
$$T(b + c)^4 = 4b^3 c;$$
$$T(b)^5 = b^5.$$

Deraf faaes $T(a + + f)^5 = 5a^4 f + 10 . 2a^3(be + cd) + 10 . 3a^2(b^2 d + bc^2)$
$+ 5 . 4ab^3 c + b^5$.

§. 10.

Bemærkning 4. Betragter man lidet nøiere Formelen,

$$T(a + + [n])^m = ma^{m-1}[n] + \frac{m\,(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2}\, T(b + + [n-1])^2 +$$
$$\frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3}\, T(b + + [n-2])^3 + + +$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(m-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m} a^{m-m}\, T(b + + [n-(m-1)])^m;$$

saa sees:

a) At Talcoefficienterne udi de særskilte Dele, hvori den søgte Coefficient fremstilles, ere de samme med Binomialcoefficienter. Denne formula polynomialis har Anseelsen af en formula binomialis.

b) Alle Dele af Coefficienterne, hvoraf a^{m-1} er en Factor, gives samlet paa eengang. Der gives altid m af dem.

c) De

c) De øvrige Dele gives ikke strax enkelt, men hele Samlinger eller Classer af dem. Det andet Stykke udi Formelen giver alle de enkelte Producter, hvoraf a^{m-2} er en Factor; det tredie alle de a^{m-3} indeholder, og saa fremdeles. Disse Classer ere særskilt af hinanden, og hver af dem indeholder blot Producterne, som ere heterogene med dem udi en anden Classe. Heterogene Producter ere her de, som indeholder enten forskiellige enkelte Factorer eller diverse Potentser af samme Factorer. Coefficienterne udi det oprindelige Polynomium ansees for de første Factorer.

d) Ethvert Stykke af Formelen udvikles efter samme Formel ved Substitutionen, og derved faaes de udi det Stykke indeholdne Producter i deres Følge, og ligeledes paa den Maade, at alle heterogene ere samlede under een Summe.

Der gives nemlig $\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ Producter, hvorudi a^{m-3} er Factor. Denne Classe angives ved $T(b + + [n-2])^3$. I Følge af Formelen faaes

$$T(b + + [n-2])^3$$
$$= 3b^2[n-2] + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} b\, T(c + + [n-3])^2 + T(c + + [n-4])^3.$$

Derudi haves alle Producter, som indeholder a^{m-3} med b^2 og de med b, og de sidste igien i samme Orden; herefter de, hvorudi er a^{m-3} med c^3, forudsat at Formelen ikke førend ophører.

Det sidste Stykke af Formelen, nemlig $T(b + + [n-(m-1)])^m$, angiver Producterne, som ei mere haver a. Den første enkelte Deel af denne Classe er $mb^{m-1}[n-(m-1)]$, og naar den $(n-(m-1))$te Coefficient i det oprindelige Polynomium sammenfalder med b, bliver denne Deel b^m, og den sidste hvorved Rækken ophører.

Naar man kommer til den Deel, hvor a udgaaer som Factor, saa sees let hele Følgen af de øvrige. Denne er den samme som ved de foregaaende, blot for et andet oprindeligt Polynomium, som begynder med b, og hvorudi numerus termini tages $n-m$.

 e) Et-

e) Ethvert Stykke af Formelen kan udvikles for sig selv, i den Følge man vil; thi ved Udviklingen af et saadant Stykke faaes aldeles inte noget af Producterne, indbefattet udi de andre Stykker.

f) Naar alle Substitutioner ere skeet, saa har man for den søgte Coefficient et heelt og reent analytisk Udtryk.

§. 11.

Bemærkning 5. Hvor numerus termini er et stort Tal, der udfordres ogsaa mange Substitutioner, førend man kommer til de enkelte Producter. Men saa mange de kan være, saa viser Fremgangsmaaden, at der ei kunde gives en kortere Methode for at erholde alle de enkelte heterogene Dele, udgiørende den søgte Coefficient; thi Formelens Brug udfordrer ei mere af de simple Operationer, som her ere Multiplicationer, end Antallet er af de heterogene enkelte Producter, hvoraf ethvert for sig udfordrer sin egen særskilte Operation, naar de særskilt fra hinanden skal angives. Alle de homogene Producter angives samlet i deres Summer paa eengang. Blier derfor Regningen vidtløstig, saa ligger Grunden i Sagens Natur. Materia longa est.

For Exempel. Naar udi den 4de Potents af Polynomium $a + bx + cx^2 + + kx^9$ Coefficienten skal angives, hvis numerus n er 12, som beregned paa den sædvanlige Maade ved at multiplicere indeholder 53 Dele, men ikke bare heterogene; saa har man $m = 4$, $n = 12$, $[n] = 0$, og $[n-1] = 0$, (fordi Coefficienterne af x^{10} og af x^{11} ere begge Nuller i det givne Polynomium); fremdeles $[n-2] = k$, $[n-3] = i$, o. s. v.

Derfor $T(a + + [n])^4 = 4a^3[n] + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} a^2 T(b + + [n-1])^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a T(b + + [n-2])^3 + T(b + + [n-3])^4$.

Men

Men 1) $a^3[n] = 0$.

2) $T(b++[n-1])^2 = 2b[n-1] + 2c[n-2] ++$
$$= 0 + 2ck + 2di + 2eh + 2fg.$$

3) $T(b++[n-2])^3 = 3b^2k + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} b\,T(c++i)^2 + T(c++h)^3$.

Igien $T(c++h)^3 = 3c^2h + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} c\,T(d++g)^2 + T(d++f)^3$;

og $T(d++f)^3 = 3d^2f + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} de^2$.

Derfor $T(b++[n-2])^3 = 3b^2k + 3b(2ci + 2dh + 2eg + f^2)$
$$+ 3c^2h + 3c(2dg + 2ef) + 3d^2f + 3de^2.$$

4) $T(b++[n-3])^4 = T(b++i)^4 = 4b^3i + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} b^2\,T(c++h)^2$
$$+ \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} b\,T(c++g)^3 + T(c++f)^4.$$

Men $T(c++g)^3 = 3c^2g + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} c\,T(d++f)^2 + T(d+e)^3$
$$(= 3d^2e);$$

og $T(c++f)^4 = 4c^3f + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} c^2\,T(d+e)^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} c\,T(d)^3$.

Substitueres disse, saa har man

$$T(a++[n])^4 = 4a^3o + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} a^2\, 2(bo + ck + di + eh + fg)$$
$$+ \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a \left\{ \begin{array}{l} 3b(bk + 2ci + 2dh + 2eg + f^2) \\ + 3c(ch + 2dg + 2ef) \\ + 3d(df + e^2) \end{array} \right.$$
$$+ 4b^3i + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} b^2\, 2(ch + dg + ef)$$
$$+ \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} b \left\{ \begin{array}{l} 3c(cg + 2df + e^2) \\ + 3d^2e \end{array} \right.$$
$$+ 4c^3f + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} c^2\, 2de$$
$$+ \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} cd^3.$$

Her

Her sees at der gives 25 heterogene Producter, som ikke kan samles i een Summe. Jeg har ellers tilsat tvende Dele, som ere Nuller, nemlig $4a^3 0$ og $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} a^2 2b0$, for at vise Analogien i den Følge af Delene (§. 10. *e*).

§. 12.

Bemærkning 6. Mængden af de enkelte heterogene Producter udi Coefficienterne beroer for største Delen paa numerus termini, deels ogsaa paa Exponenten af den Potents, hvortil Coefficienterne høre. Det sidste gaaer ikke videre, naar Exponenten $m = n - 1$; thi bliver samme endnu større, saa forandres derved blot Talcoefficienterne af de enkelte Producter, uden at Mængden af samme, som heterogene Dele, forstørres.

F. Ex. Naar $n = 4$, saa bliver den fierde Coefficient udi den tredie Potents $(a + bx + cx^2 + +)^3$ eller $T(a + + d)^3 = 3a^2 d + 3a T(b + c)^2 + T(b)^3 = 3a^2 d + 3 . 2abc + b^3$.

Tages $m = 5$, saa bliver

$$T(a + + d)^5 = 5a^4 d + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} a^3 T(b + c)^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^2 T(b)^3$$
$$= 5a^4 d + 10 . 2a^3 bc + 10a^2 b^3.$$

Dette sees umiddelbar af den almindelige Formel; thi naar Exponenten m har den Størrelse, at udi det sidste Stykke $T(b + + [n - (m - 1)])^m$ den $(n - (m + 1))$te Coefficient bliver samme med b, saa endes den, og enhver høiere Exponent forandrer Binomialcoefficienterne udi Formelen, men giver ikke mere enkelte heterogene Producter.

Naar $n < m$, saa endes Formelen for den a, som den første Coefficient, udgaaer udaf Producterne.

For $n = 2$, eller for den anden Coefficient i enhver Potents m, har man, som forhen er sagt, $ma^{m-1} b$, og for den tredie $ma^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2$.

Be-

Bemærkning 7. Naar $n = m + 1$, saa er den sidste Deel altid b^m. Naar $n = 2m + 1$, saa faaes ved Udvikling af $T(b + + [n-(m-1)])^m$ efter Formelen igien som dens sidste Stykke $T(c + + [n-(2m-2)])^m$ eller $T(c + + [3])^m = c^m$.

Bemærkning 8. Naar $n > 2m + 1$, saa bliver b ikke mere som Factor hverken udi c^m eller i de følgende Producter, ligesom forhen er sagt om a, som ved b^m udgaaer af Factorerne.

Bemærkning 9. Mængden af de heterogene Producter, Coefficienten af Qvadratet $T(a + + [n])^2$ indeholder, ere $\frac{n}{2}$, (n skal være numerus termini). Naar n er et ujevnt Tal, $2r + 1$, og $\frac{n}{2} = r + \frac{1}{2}$, saa maae endnu tillægges for den Brøk, $\frac{1}{2}$, et Product, og dette bliver et Qvadrat. Hvor der ere Nuller blandt Coefficienterne i det oprindelige Polynomium, da bortfalder derfor nogle Producter.

Denne sidstomtalte Correction iagttaget, saa har man i den nte Coefficient af den tredie Potents $\frac{n}{2} \cdot \frac{n+3}{2 \cdot 3}$ enkelte heterogene Producter. Sættes her $n = 2$, saa bliver $\frac{n}{2} \cdot \frac{n+3}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}$. Denne Brøk gielder for Eet.

Den nte Coefficient udi Potentsen m indeholder $\frac{n}{m}$ Coefficienter af de udi Potentsen af Exponenten $m - 1$. Men under disse Potentser forstaaes ei de af det oprindelige Polynomium selv, men af andre Polynomier, som udkomme af det oprindelige ved Fratagelsen af Dele og Divisionen med x, og som endnu videre bør udvikles.

Og den samme nte Coefficient udi Potentsen m indeholder $\frac{n}{2} \cdot \frac{n+m}{(m-1)m}$ Coefficienter, som henhøre til Potentser af Exponenten $m - 2$.

Angaaende Antallet af de endnu lavere Potentser, som bliver at udvikle for at saae de ommeldte enkelte heterogene Producter, saa bliver det alminmindelige Udtryk, hvorved hiin kunde angives, og derved Mængden af Substitutioner beregnes, alt for meget sammensat. For de af $(m-3)$de Potents faaer man nær $\frac{1}{2\cdot3}\cdot\frac{n(n+(m-1))(n+m)}{(m-2)(m-1)m}$. Derved forudsættes $n > m+1$.

§. 13.

Følge 1. Den almindelige Formel gielder ligeledes naar der gives blandt de første antagne n Coefficienter af det oprindelige Polynomium Nuller, omendskiønt paa disse Nuller følge andre, som ei ere det. Afkortningen, som deraf følger ved Substitutioner, findes af sig selv.

Sættes det oprindelige Polynomium $a+bx+ex^4$, saa kan derfor tages $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$, hvor $c=0$, og $d=0$. Saaledes faaer man for den femte Coefficient af den fierde Potents efter Formelen

$$T(a++e)^4 = 4a^3e + \frac{4\cdot3}{1\cdot2}a^2T(b++d)^2 + \frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}aT(b+c)^3 + T(b+b)^4.$$

Det første Stykke er $4a^3e$; det andet indeholder $T(b++d)^2 = 2bd+c^2 = 0$; det tredie har $T(b+c)^3 = 3b^2c = 0$, og ligeledes det sidste $T(b+b)^4 = T(b)^4 = b^4 = 0$. Der bliver derfor kun igien $4a^3e$ som den søgte Coefficient.

Følge 2. Det oprindelige Polynomium lad være $\alpha+\beta x^r+\gamma x^s+\delta x^t$. De Exponenter d, r, s, t, naar de ere rationale Tal, kan altid henføres til en arithmetisk Række, hvorudi samme indeholdes, og denne Række opfindes ved bekiendte Methoder. Sæt denne Række er funden, og Differentsen udi samme d, saa kan isteden for det givne Polynomium skrives

$$a+bx^d+cx^{2d}++\beta x^r++\gamma x^s++\delta x^t++$$

og man har numerus termini for de Coefficienter til x^r, x^s, x^t udi den sidste Række.

Lige-

Ligeledes har man samme Ordenstal for enhver Coefficient udi

$$(a + bx^d + cx^{2d} + + \beta x^r + + \gamma x^s + + \delta x^t)^m,$$

og saa kan man giøre efter Formelen.

F. Ex. Det oprindelige Polynomium skal være $\alpha + \beta x^{\frac{6}{4}} + \gamma x^2 + \delta x^{\frac{9}{4}}$, og Coefficienten til x^3 skal findes udi den fierde Potents. Man skriver derfor $\alpha + bx^{\frac{1}{4}} + cx^{\frac{2}{4}} + dx^{\frac{3}{4}} + ex + fx^{\frac{5}{4}} + \beta x^{\frac{6}{4}} + gx^{\frac{7}{4}} + \gamma x^2 + \delta x^{\frac{9}{4}} + lx^{\frac{10}{4}} + mx^{\frac{11}{4}} + [n]x^3$, hvor alle Coefficienter ere Nuller, undtagen α, β, γ, δ. Her er altsaa $m = 4$, $n = 13$, $[n] = 0$, $[n-1] = 0$, $[n-2] = 0$, $[n-3] = \delta$, o. s. v.

Derfor $T(a + + [n])^4 = 4a^3[n] + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} a^2 T(b + + [n-1])^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a T(b + + [n-2])^3 + T(b + + [n-3])^4$.

Deraf giver det sidste Stykke $T(b + + [n-3])^4$, naar det udvikles, Classer af Producterne, hvoraf b er Factorer, undtagen det sidste $T(c + + [n-6])^4$. Alle hine ere Nuller. Men $T(c + + [n-6])^4$ giver bare Classer, som indeholder c, undtagen det sidste Stykke $T(d + + [n-g])^4 = T(d + d)^4 = d^4 = 0$. Alle disse ere derfor Nuller.

Ved Udviklingen af $T(b + + [n-2])^3$ faaes igien kun Delene, som har Factoren b og ere Nuller, foruden $T(c + + [n-4])^3$, der ogsaa giver Nuller, med det sidste $T(d + + [n-6])^3$, hvilken igien giver Delene multiplicerede med d, og $T(e + + [n-8])^3 = e^3 = 0$.

Nu er desuden $4a^3[n] = 0$.

Der bliver altsaa kun tilbage $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} a^2 T(b + + [n-1])^2$

$$= \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} a^2 (2bm + 2cl + 2d\delta + 2e\gamma + 2fg + \beta^2)$$

$$= \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} a^2 \beta^2, \text{ fordi hele Resten er Nul.}$$

§. 14.
Beviis af den almindelige Formel.

I. Angaaende Coefficienterne udi Qvadratet, saa har man (efter §. 5. og §. 6. Følge 2.)

$$T(a++[n])^2 = 2a[n] + T(b++[n-1])^2,$$
$$T(a++[n-1])^2 = 2a[n-1] + T(b++[n-2])^2, \text{ og}$$
$$T(b++[n-1])^2 = 2b[n-1] + T(c++[n-2])^2.$$

II. Samme Formel er rigtig for den tredie Potents, eller for

$$T(a++[n])^3 = 3a^2[n] + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} a T(b++[n-1])^2 + T(b++[n-2])^3.$$

Dette sees saaledes:

1) Lad være $(a+bx+cx^2++)^2 = A+Bx+Cx^2++[N-II]x^{n-2} + [N-I]x^{n-1} + [N]x^n$, eller den nte Coefficient udi Qvadratet er $[N]$, den $(n-1)$te $[N-I]$, og den $(n-2)$te $[N-II]$ o. s. v.

2) Saa har man i Følge af §. 6.

$$[N] = T(a++[n])^2 = 2a[n] + T(b++[n-1])^2,$$
$$[N-I] = T(a++[n-1])^2 = 2a[n-1] + T(b++[n-2])^2,$$
$$[N-II] = T(a++[n-2])^2 = 2a[n-2] + T(b++[n-3])^2$$
$$+++$$
$$C = T(a++[n-(n-3)])^2 = T(a++c)^2 = 2ac+T(b)^2 = 2ac+b^2,$$
$$B = T(a++[n-(n-2)])^2 = T(a+b)^2 = 2ab,$$
$$A = T(a++[n-(n-1)])^2 = T(a+a)^2 = a^2.$$

3) Efter Sætning 1. §. 4. er den nte Coefficient udi $(a+bx+cx^2++)^3 = (A+Bx+Cx^2++) . (a+bx+cx^2++)$, eller $T(a++[n])^3$

$$= a[N]+b[N-I]+c[N-II]++[n-2]C+[n-1]B+[n]A$$
$$= aT(a++[n])^2 = 2a^2[n] + aT(b++[n-1])^2$$
$$+ bT(a++[n-1])^2 = 2a[n-1]b + bT(b++[n-2])^2$$
$$+ cT(a++[n-2])^2 = 2a[n-2]c + cT(b++[n-3])^2$$
$$+++$$

$+ [n-2]C$

$$+ [n-2]C = [n-2]T(a + + c)^2 = [n-2]2ac + [n-2]T(b)^2$$
$$+ [n-1]B = [n-1]T(a + b)^2 = [n-1] + 2ab$$
$$+ [n]A = [n]a^2.$$

Samles disse Dele paa begge Sider, saa faaes

$$\begin{aligned} & T(a + + [n])^3 \\ = {} & 2a^2[n] + 2a([n-1]b + [n-2]c + + c[n-2] + b[n-1]) \\ & + a^2[n] \\ & \qquad + aT(b + + [n-1])^2 \\ & + bT(b + + [n-2])^2 + cT(b + + [n-3])^2 + + [n-2]T(b + b)^2. \end{aligned}$$

4) Men $2a^2[n] + a^2[n] = 3a^2[n]$.

Endvidere $2a([n-1]b + [n-2]c + + + c[n-2] + b[n-1]) = 2aT(b + + [n-1])^2$; thi $T(b + + [n-1])^2$ er en Coefficient udi $(b + cx + dx^2 + +)^2$, hvis numerus termini er lige med Antallet af Coefficienterne $b + + [n-1]$ udi det forkortede og dividerede oprindelige Polynomium, nemlig $[n-2]$, efter §. 5.

5) De øvrige Dele (udi 3), nemlig

$$bT(b + + [n-2])^2 + cT(b + + [n-3])^2 + + [n-2]T(b + b)^2,$$

ere Producter, som udkommer ved Multiplicationen af de Coefficienter udi $(b + cx + dx^2 + + [n-2]x^{n-3})^2$ med de i en omvendt Orden tagne Coefficienter udi $b + cx + + [n-2]x^{n-3}$. Summen af samme giver derfor Coefficienten $T(b + + [n-2])^3$, eller den udi $(b + cx + + [n-2]x^{n-3})^3$.

6) Saaledes har man

$$T(a + + [n])^3 = 3a^2[n] + 3aT(b + + [n-1])^2 + T(b + + [n-2])^3,$$

og derfor er den almindelige Formel,

$$\begin{aligned} T(a + + [n])^m = {} & ma^{m-1}[n] + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}a^{m-2}\,T(b + + [n-1])^2 \\ & + \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^{m-3}T(b + + [n-2])^3 + + \\ & T(b + + [n-(m-1)])^m, \end{aligned}$$

rigtig for $m = 3$, ligesom for $m = 2$.

§. 15.

III. Naar Formelen er rigtig for den mte Potens, saa gielder samme ogsaa for den næst høiere, den $(m+1)$te.

1) Naar man multiplicerer Coefficienterne udi den mte Potents

$T(b++[n-2])^m$, $T(b++[n-3])^m \ldots T(b+c)^m$, $T(b+b)^m$ $(= b^m)$
med b, c . . . . $[n-3]$, $[n-2]$,

enhver ovenstaaende med den neden under satte, saa faaes Producter, som samlede udgiør

$bT(b++[n-2])^m + cT(b++[n-3])^m ++ [n-3]T(b+c)^m + [n-2]b^m$
$= T(b++[n-2])^{m+1}$ (§. 4.); thi de ovenpaa satte ere Coefficienterne udi $(b+cx++[n-2]x^{n-3})^m$ i en omvendt Orden, og de under dem satte $b, c \ldots [n-2]$ ere de af $b+cx++[n-2]x^{n-3}$.

2) Naar paa en lige Maade Coefficienterne

$T(b++[n-1])^m$, $T(b++[n-2])^m \ldots T(b+b)^m$
multipliceres med a, b . . . . $[n-2]$,

saa bliver Producternes Summe

$$aT(b++[n-1])^m + T(b++[n-2])^{m+1}.$$

Coefficienternes Antal udi $(b++[n-1])^m$ er $n-2$. Naar de derfor i en omvendt Orden sammensættes med Coefficienterne $a+b++[n-2]$ udi det oprindelige Polynomium, saa kommer den sidste af disse, nemlig $[n-2]$, under de første af hine $T(b+b)^m$.

3) Udi den almindelige Formel bliver $T(a++[n])^m$ altid $= a^m$, naar n falder sammen med a (§. 6. Følge 1.); men da gives der ikke flere Dele.

4) Den første Deel af Coefficienten $T(a++[n])^m$, nemlig $ma^{n-1}[n]$, bliver for de foregaaende Coefficienter $ma^{n-1}[n-1]$, $ma^{n-1}[n-2]$, o. s. v.

Naar nu $ma^{m-1}[n]$, $ma^{m-1}[n-1] \ldots ma^{m-1}b$, $a^{m-1}a$
multipliceres med a, b . . . . . $[n-1]$, $[n]$,

saa bliver Producternes Summe

$$= (m+1)a^{m-1}a[n] + ma^{m-1}([n-1]b + [n-2]c ++ b[n-1])$$
$$= (m+1)a^m[n] + ma^{m-1}T(b++[n-1])^2.$$

5) Naar

5) Naar for den mte Potents haves

$$T(a + + [n])^m = ma^{m-1}[n] + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} T(b + + [n-1])^2 + + Pa^{m-h} T(b + + [n-(h-1)])^h + Qa^{m-h-1} T(b + + [n-h])^{h+1} + + T(b + + [n-(m-1)])^m,$$

hvor P og Q ere tvende næst paa hinanden følgende Binomialcoefficienter af den mte Potents; saa bliver

$$T(a + + [n])^{m+1} = T(a + + [n])^m + bT(a + + [n-1])^m + + [n-1]T(a+b)^m + [n]a^m.$$

6) Derfor kan ogsaa enhver Deel af $T(a + + [n])^m$ først for sig selv forandres saaledes, som den bliver i de for den nte foregaaende Coefficienter, i den $(n-1)$te, den $(n-2)$te o. s. v. tilbage til den første, og naar dette er skeet, og enhver af de forandrede Dele multipliceres med $a, b \ldots [n]$, saa opnaaer man $T(a + + [n])^{m+1}$.

7) Saaledes har man for det første Stykke udi $T(a + + [n])^m$,

nemlig	$ma^{m-1}[n]$,	$ma^{m-1}[n-1] \ldots$	$ma^{m-1}b$,	a^m
med	a,	$b \ldots$	$[n-1]$,	$[n]$.

Dette giver $(m+1)a^m[n] + ma^{m-1}T(b + + [n-1])^2$, (efter No. 4).

Den følgende Deel af $T(a + + [n])^m$ er $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} T(b + + [n-1])^2$.

Men	$T(b + + [n-1])^2$,	$T(b + + [n-2])^2 \ldots$	$T(b+b)^2$
med	a,	$b \ldots$	$[n-2]$,

giver $aT(b + + [n-1])^2 + T(b + + [n-1])^3$, (efter No. 2).

Derfor kommer af disse begge Dele den første og den anden tilsammen,

$$(m+1)a^m[n] + \left(m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}\right) a^{m-1} T(b + + [n-1])^2 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} T(b + + [n-2])^3,$$

eller naar i det sidste Udtryk for den næst høiere Potents sættes m isteden for $m+1$, saa faaes

$$ma^{m-1}[n] + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} T(b + + [n-1])^2 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} T(b + + [n-2])^3.$$

8) I

8) I Almindelighed naar der tages Stykket $Pa^{m-h}T(b++[n-(h-1)])^h$ af Coefficienten udi den mte Potents, og forandres saaledes efter No. 4 som samme indeholdes udi de foregaaende Coefficienter af den samme Potents, og multipliceres

$PT(b++[n-(h-1)])^h$, $PT(b++[n-h])^h \ldots PT(b+b)^h$
med a, $b \ldots\ldots [n-h]$,

saa faaer man efter No. 2

$$PaT(b++[n-(h-1)])^h + PT(b++[n-h])^{h+1}.$$

Ligeledes kommer ud af Delen $QT(b++[n-h])^{h+1}$ de tvende andre,

$$QaT(b++[n-h])^{h+1} + QT(b++[n-(h-1)])^{h+2}.$$

I Følge deraf faaer man isteden for $Pa^{m-h}T(b++[n-(h-1)])^h$ i den mte Potents disse:

$$Pa^{m-h+1}T(b++[n-(h-1)])^h + Pa^{m-h}T(b++[n-(h-1)])^{h+1}$$

udi Potentsen $m+1$; og for $Qa^{m-h-1}T(b++[n-h])^{h+1}$ udi Potentsen m disse:

$$Qa^{m-h}T(b++[n-h])^{h+1} + Qa^{m-h-1}T(b++[n-h])^{h+2}.$$

Det er: Naar den nte Coefficient af den mte Potents forandres til den nte af den $(m+1)$te Potents, saa forandres enhver Deel udi Formelen saaledes, at for $Qa^{m-h-1}T(b++[n-h])^{h+1}$ haves $(P+Q)T(b++[n-h])^{h+1}$; det er, at Delen $Qa^{m-h-1}T(b++[n-h])^{h+1}$ multipliceres med a, og erholder en Coefficient, som er Summen af tvende næstfølgende Binomialcoefficienter udi Potentsen m, nemlig af den Deel, samme har udi den mte Potents, og sammes foregaaende.

Men man veed af Reglen for Binomialcoefficienterne, at $P+Q$, eller Summen af de tvende næstfølgende Coefficienter udi Potentsen m, bliver Coefficienten udi Potentsen $m+1$ for den samme Deel, hvortil Q udi den mte henhører, og hvis næst foregaaende er P. Deraf følger at samme Formel, naar den gielder for den mte Potents, gielder

der ligeledes for den $(m+1)$te. Thi naar udi sammes Formel istedet for m sættes $m+1$, saa bliver enhver Deel multiplieeret med a, og enhver Binomialcoefficient bliver den til samme Deel henhørende udi Potentsen $m+1$.

§. 16.

Sætning 5.

Den fremsatte Polynomialformel har den samme almindelige Gyldighed med Binomialformelen, og giælder altsaa ligeledes for Potentser, hvis Exponenter ere Brøk eller negative Tal.

Beviis. Dette bevises lettest ved et andet Beviis, som kan gives for Polynomialformelen.

1) Sæt $a+bx+cx^2++[n-2]x^{n-3}+[n-1]x^{n-2}+[n]x^{n-1}++$ $= a+y$, eller

$$y = bx+cx^2++[n-2]x^{n-3}+[n-1]x^{n-2}+[n]x^{n-1}++,$$
$$y^2 = x^2(b+cx++[n-2]x^{n-4}+[n-1]x^{n-3}++)^2,$$
$$y^3 = x^3(b+cx++[n-2]x^{n-4}++)^3,$$
$$y^m = x^m(b+cx++[n-(m-1)]x^{n-m-1}++).$$

2) Endvidere

$$(a+bx+cx^2++)^m = a^m + ma^{m-1}y + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}y^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-3}y^3 ++.$$

Dette finder Sted efter Binomialformelen, og giælder ogsaa hvor m er enten en Brøk eller negativ.

3) Ogsaa hvor Ligningen udi No. 2 finder Sted, bliver den nte Coefficient, det er Coefficienten for x^{n-1} udi $(a+y)^m$ eller udi $(a+bx+cx^2++)^m$, Summen af alle Coefficienter for x^{n-1}, som er indeholden udi $ma^{m-1}y$, $\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}ma^{m-2}y^2$ o. s. v., eller udi enhver Potents af y, f. Ex. y^h multiplieeret med den dertil hørende Binomialcoefficient og med a^{m-h}.

4) Men Coefficienten for x^{n-1}, udi $ma^{m-1}y$, bliver $ma^{m-1}[n]$;
udi $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}a^{m-2}y^2$ bliver samme $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}a^{m-2}T(b++[n-1])^2$;
udi $\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{m-3}y^3$, $\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{m-3}T(b++[n-2])^3$ o. s. v.
udi $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(m-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \cdot m}a^{m-m}y^m$, $T(b++[n-(m-1)])^m$.

5) Følgelig Coefficienten til x^{n-1}
udi $(a+y)^m$ eller udi $(a+bx+cx^2++)^m$, det er

$$T(a++[n])^m = ma^{m-1}[n] + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}a^{m-2}T(b++[n-1])^2 ++ T(b++[n-(m-1)])^m.$$

§. 17.

Sætning 6.

Lad være

$$P = a + bx + cx^2 ++ [n-2]x^{n-3} + [n-1]x^{n-2} + [n]x^{n-1} ++,$$
$$Q = \alpha + \beta x + \gamma x^2 ++ [\nu-2]x^{n-3} + [\nu-1]x^{n-2} + [\nu]x^{n-1} ++;$$

(hvor n, som numerus termini af den nte Coefficient, er det samme med ν; men Coefficienterne selv, [n] og [ν], ere ei de samme).

Den nte Coefficient udi P^mQ^h kan angives ved

$$T((a++[n])^m.(\alpha++[\nu])^h),$$

og paa samme Maade udi Productet

$$(b+cx+dx^2++)^m.(\beta+\gamma x+\delta x^2++)^h$$

ved $T((b++[n-1])^m.(\beta++[\nu-1])^h)$,
den som her er den (n−2)te.

Dette forudsat, har man den almindelige Formel for Coefficienterne udi Productet P^mQ^h saaledes:

T((a++

$$T((a + + [n])^m . (\alpha + + [\nu])^h)$$
$$= ma^{m-1}\alpha^h[n] + \frac{m(m-1)}{1 . 2} a^{m-2}\alpha^h T(b + + [n-1])^2$$
$$+ ha^m\alpha^{h-1}[\nu] + \frac{h(h-1)}{1 . 2} a^m \alpha^{h-2} T(\beta + + [\nu - 1])^2$$
$$+ \frac{m}{1} . \frac{h}{1} a^{m-1}\alpha^{h-1} T((b + + [n]) . (\beta + + [\nu]))$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 . 2 . 3} a^{m-3}\alpha^h T(b + + [n-2])^3$$
$$+ \frac{h(h-1)(h-2)}{1 . 2 . 3} a^m \alpha^{h-3} T(\beta + + [\nu-2])^3$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1 . 2} . \frac{h}{1} a^{m-2}\alpha^{h-1} T((b + + [n-2])^2 . (\beta + + [\nu-2]))$$
$$+ \frac{m}{1} . \frac{h(h-1)}{1 . 2} a^{m-1}\alpha^{h-2} T((b + + [n-2]) . (\beta + + [\nu-2])) + + +$$

Beviis.

1) Sæt $P = a + bx + cx^2 + + = a + y$,
$Q = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + + = \alpha + z$; saa bliver

$$P^m = a^m + ma^{m-1}y + \frac{m(m-1)}{1 . 2} a^{m-2}y^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 . 2 . 3} a^{m-3}y^3 + +,$$

og
$$Q^h = \alpha^h + h\alpha^{h-1}z + \frac{h(h-1)}{1 . 2}\alpha^{h-2}z^2$$
$$+ \frac{h(h-1)(h-2)}{1 . 2 . 3}\alpha^{h-3}z^3 + +;$$

$$P^m Q^h = a^m\alpha^h + ma^{m-1}\alpha^h y + \frac{m(m-1)}{1 . 2} a^{m-2}\alpha^h y^2$$
$$+ ha^m\alpha^{h-1}z + \frac{h(h-1)}{1 . 2} a^m\alpha^{h-2}z^2$$
$$+ \frac{m}{1} . \frac{h}{1} a^{m-1}\alpha^{h-1}yz$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 . 2 . 3} a^{m-3}\alpha^h y^3$$
$$+ \frac{h(h-1)(h-2)}{1 . 2 . 3} a^m\alpha^{h-3}z^3$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1 . 2} . \frac{h}{1} a^{m-2}\alpha^{h-1}y^2 z$$
$$+ \frac{m}{1} . \frac{h(h-1)}{1 . 2} a^{m-1}\alpha^{h-2}yz^2 + + +$$

Fremgangsmaaden sees herudi af Binomialformelen. Det hele Product $P^m Q^h$ deles saaledes efter Potentserne af a og α, og af y og z, at til een og den samme Deel henregnes alt det, hvorudi Summen er den samme af Exponenterne af a og α, og af y og z. Derfor ere Factorerne $a^{m-1}\alpha^h$, $a^m\alpha^{h-1}$, Characterer for den samme Deel; ogsaa $a^{m-2}\alpha^h$, $a^{m-1}\alpha^{h-1}$, $a^m\alpha^{h-2}$, for en anden o. s. v. Og Summen af Exponenten for a og α bliver om Eet mindre udi den næstfølgende Deel, hvorimod samme for y og z forhøies ved Eet. Begge Summer tilsammen udgiøre altid $m + h$. Naar derfor hiin er $m + h - n$, saa er denne n.

2) Derfor haves den nte Coefficient, tilhørende til x^{n-1} udi $P^m Q^h$ (den første er altid $a^m\alpha^h$), naar der bringes i en Summe Coefficienterne af x^{n-1}, som ere udi y, z, y^2, z^2, yz, y^3, y^2z, yz^2, z^3, og saa videre, men enhver af dem multipliceret med de dertil hørende Factorer. Disse Factorer ere de Potentser af a og α, og de til de Potentser af a og α henhørende Binomialcoefficienter.

3) Da derfor den Coefficient af x^{n-1} udi y eller udi $bx + cx^2 + dx^3 + + [n]x^{n-1}$ er $[n]$, og den samme udi $z = \beta x + \gamma x^2 + + [\nu]x^{n-1}$ er $[\nu]$, saa faaes den første Deel af den søgte Coefficient, nemlig:

$$ma^{m-1}\alpha^h[n] + ha^m\alpha^{h-1}[\nu].$$

4) Udi $y^2 = (bx + cx^2 + + [n-2]x^{n-3} + [n-1]x^{n-2} + [n]x^{n-1})^2 = x^2(b + cx + + [n-2]x^{n-4} + [n-1]x^{n-3} + +)^2$ er Coefficienten af x^{n-1} $(b + + [n-1])^2$.

Udi $z^2 = x^2(\beta + \gamma x + + [\nu-2]x^{n-4} + [\nu-1]x^{n-3} + +)^2$ er samme $T(\beta + + [\nu-1])^2$.

Og udi $yz = x^2(b + cx + + [n-2]x^{n-4} + [n-1]x^{n-3} + +)$ multipliceret med $(\beta + \gamma + + [\nu-1]x^{n-3})$ er den $T(b + + [n-1])(\beta + + [\nu-1])$.

5) Lige=

5) Ligeledes udi y^3 bliver den $T(b ++ [n-2])^3$;
udi z^3, $T(\beta ++ [\nu-2])^3$;
udi y^2z, $T((b ++ [n-2])^2 . (\beta ++ [\nu-2]))$; og
udi yz^2, $T((b ++ [n-2]) . (\beta ++ [\nu-2])^2)$, og saaledes videre.

6) Naar nu enhver af disse Coefficienter multipliceres med de tilhørende Factorer udi $P^m Q^h$, saa har man det almindelige Udtryk for

$$T(a ++ [n])^m . (\alpha ++ [\nu])^h.$$

§. 18.

Bemærkning 1. Denne Fremgangsmaade viser ogsaa, hvorledes de efterfølgende Dele let kunde angives.

1) Først characteriseres Delene af Coefficienten ved Summen af de Exponenter af a og α, saasom man har giort udi Formelen for $T(a ++ [n])^m$ ved Exponenten af a alene.

Denne Summe er $m + h$ udi den første Coefficient af $P^m Q^h$, henhørende til x^0; den er $m + h - 1$ udi den næste, og saa videre om Eet mindre udi den næstfølgende.

2) Det giver særskilte Producter af Potentserne af a og α, henhørende til den samme Deel, som udgiør Underafdelinger f. Ex. for den fierde Deel udi Formelen, hvor Exponenternes Summe er $m + h - 4$, har man følgende Afdelinger:

$a^{m-4}\alpha^h$,
$a^{m-3}\alpha^{h-1}$,
$a^{m-2}\alpha^{h-2}$,
$a^{m-1}\alpha^{h-3}$,
$a^m\alpha^{h-4}$.

 3) Til

3) Til enhver af disse Afdelinger skrives de tilhørende Binomialcoefficienter, som man har udi

$$T(a \dotplus\dotplus [n])^m = m a^{m-1}[n] \dotplus \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} T(b \dotplus\dotplus [n-1])^2 \dotplus\dotplus$$

og udi $T(\alpha \dotplus\dotplus [\nu])^h = h\alpha^{h-1}[\nu] \dotplus \frac{h(h-1)}{1 \cdot 2} \alpha^{h-2} T(\beta \dotplus\dotplus [\nu-1])^2 \dotplus\dotplus$

4) Og ligeledes skrives dertil de Polynomialcoefficienter, som ved enhver Potents af a og α ere forbundne udi de samme sidste Formeler, dog saa at de tages saaledes som de bør for Coefficienterne af den samme numerus termini. Saa har man for den fierde Deel af $T(a \dotplus\dotplus [n])^m . (\alpha \dotplus\dotplus [\nu])^h$ efterfølgende Afdelinger:

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4} \alpha^h T(b \dotplus\dotplus [n-3])^4$$

$$\dotplus \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} . \frac{h}{1} a^{m-3} \alpha^{h-1} T((b \dotplus\dotplus [n-3])^3 . (\beta \dotplus\dotplus [\nu-3]))$$

$$\dotplus \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} . \frac{h(h-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} \alpha^{h-2} T((b \dotplus\dotplus [n-3])^2 . (\beta \dotplus\dotplus [\nu-3])^2)$$

$$\dotplus \frac{m}{1} . \frac{h(h-1)(h-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-1} \alpha^{h-3} T((b \dotplus\dotplus [n-3]) . (\beta \dotplus\dotplus [\nu-3])^3)$$

$$\dotplus \frac{h(h-1)(h-2)(h-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^m \alpha^{h-4} T(\beta \dotplus\dotplus [\nu-3])^4.$$

Bemærkning 2. Naar f. Ex. $m = 3$, saa falder den Afdeling bort, som har a^{m-4}. For Resten kan m og h være lige eller ulige.

Naar $m = 3 = h$, da bortfalder endnu videre den sidste Afdeling.

§. 19.

Bemærkning 3. Coefficienten $T((b \dotplus\dotplus [n]) . (\beta \dotplus\dotplus [\nu]))$ kan ansees som den Deel af det Hele, som uden videre Udvikling ved Substitutionen (efter Sætning 1. §. 4.) er given. De følgende kræver nye Substitutioner efter den almindelige Formel.

Men

Men hvor mange endnu maatte udfordres af Substitutioner, før man kommer til de enkelte heterogene Producter, hvoraf den søgte Coefficient er sammensat, saa kan man her paa samme Maade slutte sig til, som forhen §. 11, at det ei er mueligt at finde samme med en mindre Mængde af simple arithmetiske Operationer. Og derfor kan man sige, at samme findes paa den korteste Vei efter den givne Formel.

Ligeledes kan enhver Deel af Coefficienten, og enhver Afdeling af samme, udvikles efter Behag udenfor den Orden, hvori de følge paa hinanden udi Formelen.

§. 20.

Sætning 7.

Summen af alle Coefficienter af Polynomium $(a + bx + +)^m$ til den nte (denne iberegnet) findes ved at sætte i den almindelige Formel, successive isteden for de sidste Coefficienter af det oprindelige Polynomium de foregaaende, til den som er den første i enhver Deel, og ved at summere derefter alle disse Værdier. Summeringen skeer ved enhver Deel paa den samme Maade som ved den første $ma^{m-1}[n]$, hvoraf Summen er $a^m + ma^{m-1}(b + c + + [n])$.

Beviis. Den nte Coefficient eller $T(a + + [n])^m$ er $=$

$$ma^{m-1}[n] + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} T(b + + [n-1])^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} T(b + + [n-2])^3 + +$$
$$T(b + + [n-(m-1)])^m.$$

Sættes i den første Deel, isteden for $[n]$, successive de foregaaende Coefficienter til den første a, denne iberegnet, som Coefficienten for x^0, saa bliver Summen af $ma^{m-1}[n]$,

eller

eller $Sma^{m-1}[n] = a^m$ (§. 7. for a isteden for [n])

$$+ ma^{m-1}b + ma^{m-1}c + + ma^{m-1}[n]$$
$$= a^m + ma^{m-1}(b + c + + [n]).$$

Videre $T(b + + [n-1])^2 = 2b[n-1] + T(c + + [n-2])^2$,

og $S2b[n-1] = b^2 + 2b(c + d + + [n-1])$.

Ligeledes $T(b + + [n-2])^3 = 3b^2[n-2] + 3bT(c + + [n-3])^2 + T(c + + [n-4])^3$,

og $S3b^2[n-2] = b^3 + 3b^2(c + d + + [n-2])$.

Altsaa $ST(a + b + + [n])^m = a^m + ma^{m-1}(b + c + + [n])$

$$+ \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2}((b^2 + 2b(c + d + + [n-1])) + ST(c + + [n-2])^2)$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3}((b^3 + 3b^2(c + d + + [n-2])) + 3bST(c + + [n-3])^3 + T(c + + [n-4])^3)$$
$$+ + +$$

§. 21.

Følge 1. Isteden for de Binomialcoefficienter m, $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$ o. s. v. kan skrives A, B, C o. s. v.

Naar Udviklingen endnu videre fremsættes, saa faaer man:

$$ST(a + + [n])^m = a^m + Aa^{m-1}(b + c + + [n])$$
$$+ Ba^{m-2}\left[\begin{array}{l} b^2 + 2b(c + d + + [n-1]) \\ + c^2 + 2c(d + e + + [n-2]) \\ + d^2 + 2d(e + f + + [n-3]) \\ + + + \end{array}\right]$$
$$+ Ca^{m-3}\left[\begin{array}{l} b^3 + 3b^2(c + d + + [n-2]) \\ + 3bc^2 + 3 \cdot 2bc(d + e + + [n-3]) \\ + c^3 + 3c^2(d + e + + [n-4]) \\ + 3cd^2 + 3 \cdot 2cd(e + f + + [n-5]) \\ + d^3 + 3d^2(e + f + + [n-6]) \\ + + + \end{array}\right]$$

Fremgangsmaaden og Reglen sees deraf.

§. 22.

§. 22.

Bemærkning 1. Det forhen bemærkte udi §. 9 og 10 kan her tildeels igientages. De heterogene Producter, som indeholdes i den hele Summe af n Coefficienter, gives alle paa engang med deres Antal. Ligeledes kan her Udviklingen foretages ved enhver Deel, man vil, uden Orden.

Bemærkning 2. Naar Udviklingen af Formelen er kommen til den Deel b^m (naar samme er der, som den altid er naar $n = m + 1$, eller større), saa kan den følgende Udvikling ansees blot som en Igientagelse af den forrige; der behøves kun at skrive b isteden for a, og saa videre for enhver af de første Coefficienter den næstfølgende, og isteden for den sidste $[n]$, og dens foregaaende, der nu bliver den sidste, nemlig $[n-(m-1)]$, og foregaaende, indtil enhver enkelt Række hører op.

Bemærkning 3. Gives der kuns et bestemt Antal af Coefficienter udi det oprindelige Polynomium, nemlig $[\nu]$, som ikke ere Nuller, og man vil have Summen af n Coefficienter udi $(a + bx + + [n]x^{n-1})^m$, hvor $n > \nu$, saa giøres her, som forhen §. 6. Man antager udi det oprindelige Polynomium ligeledes n, hvoraf alle efter $[\nu]$ ere Nuller.

§. 23.

Følge 2. Naar n er saa stor som Antallet af alle Coefficienter udi $(a + bx + + [\nu]x^{\nu-1})^m$, det er, naar $n = (\nu-1)m + 1$, saa erholdes hele Summen af dem alle ved Methoden udi §. 21; og da bliver det ligegyldig om nu n antages endnu større eller ei, da derved denne Summe ikke bliver forandret. Derfor kan n sættes ubestemlig stor, saa at udi Formelen §. 21 $[n-1]$, $[n-2]$, $[n-3]$ o. s. v. ere endnu større end ν. Saaledes erholdes hele Summen af Coefficienter udi $(a + bx + + [\nu]x^{\nu-1})^m$ ved Formelen i §. 21, naar enhver Række af dem fremsættes til $[\nu]$.

§. 24.

Sætning 8.

Udi Polynomierne af den anden Form, nemlig $(a+b+c++[\nu])^m$, hvor Delene ikke sættes efter Potentser af en foranderlig Størrelse, findes samme paa lige Maade og i deres Følge som Coefficienternes Summe af $(a+bx+cx^2++[\nu]x^{\nu-1})^m$; og man faaer dem ved Formelen i §. 20, naar n sættes ubestemlig stor, og man altsaa giør efter §. 23.

Man har derfor $(a+b+c++[\nu])^m = ST(a++[\nu])^m$

$$= Aa^{m-1}S[\nu] + Ba^{m-2}ST(b++[\nu])^2 + Ca^{m-3}ST(b++[\nu])^3 ++$$

$$= a^m + Aa^{m-1}(b+c+d++[\nu])$$

$$+ Ba^{m-2}\left[\begin{array}{l} b^2 + 2b(c+d++[\nu]) \\ + c^2 + 2c(d+e++[\nu]) \\ + d^2 + 2d(e+f++[\nu]) \\ ++ \\ [\nu]^2 \end{array}\right]$$

$$+ Ca^{m-3}\left[\begin{array}{l} b^3 + 3b^2(c+d++[\nu]) \\ + 3bc^2 + 3.2bc(d+e++[\nu]) \\ + c^3 + 3c^2(d+e++[\nu]) \\ + 3cd^2 + 3.2cd(e+f++[\nu]) \\ + d^3 + 3.2de(f+g++[\nu]) \\ ++ \\ [\nu]^3 \\ ++ \end{array}\right]$$

§. 25.

Følge 1. Naar det oprindelige Polynomium er $a+b+c++[\nu]$, saa indeholdes udi $(a+b+c++[\nu])^m$ de samme heterogene Producter, og

et

et lige Antal af dem, Ordenen eller Følgen, hvori a, b, c...[ν] sættes, maae være som man vil. Potentserne af a ere paa lige mangfoldige Maader combineret med b og dens Potentser, som de sidste med hine. Dette giælder af enhver af de simple Factorer udi $a+b++[\nu]$. Enhver af dem er paa samme Maade som Medfactor forbunden med de øvrige. Det samme finder Sted udi den hele Coefficienternes Summe af $(a+bx+cx^2++[\nu])^m$.

Man kan i Følge af den forrige Formel først udvikle de Classer, som ere characteriserede ved Potentser af a. Herudi faaes alle de Dele, hvori a og dens Potentser ere sammen med de følgende b, c... og deres Potentser. Gaaes nu frem til de ved b og dets Potentser characteriserede Classer, saa kommer man til de Dele, hvorudi b og dens Potentser ere indeholdne med de paa b følgende Factorer, men hvorudi ikke mere findes a. Derpaa følger de ved c og dets Potentser characteriserede Classer. Disse have kun med sig de følgende Factorer, men ei a eller b. Paa lige Maade gaaer man frem, hvorved enhver af de følgende Classer bliver mindre i Henseende til Antallet af Delene.

Naar den første Classe, hvis Characteristik er a, er bleven udviklet, saa har man strax den anden, characteriseret med b. Der sættes isteden for a, b, og for b, c, og saa videre for enhver Factor dens paafølgende saavidt de ere der.

§. 26.

Følge 2. Naar $a+b+c++$ er et Infinitinomium, saa giver Formelen udi §. 24 alle de Dele, som indeholdes udi $(a+b++[\nu])^m$. Deriblandt gives ingen af de paa [ν] følgende Factorer. Men da kan tages [ν] saa langt man vil fra den første i det oprindelige Polynomium. Deraf haves tillige Lovene for en enhver Classe in infinitum.

§. 27.

Bemærkning. Producter af den Form $(a+b+c+ +)^m (\alpha+\beta+\gamma+ +)^h$ findes af Formelen udi §. 17 paa samme Maade. Det synes mig at være overflødig, at indgaae endnu videre heri. Hovedsagen bliver allerider formula polynomialis, hvoraf det øvrige let deduceres.

Ogsaa kan jeg nu undgaae at give særskilte Demonstrationer af de udi den Kongelige Videnskabers Selskabs Skrivters nye Samling, femte Deel, S. 131 og følgende fremsatte Formeler, hvortil et Problem i Probabilitetens Calcul henhører. Jeg regner blandt de af Polynomialformelen erholdende Fordele ogsaa den, at Probabilitetens Calcul, saavidt den er theoretisk og arithmetisk, bliver paa en vis Maade fuldstændig. Thi det er en anden Sag, naar der spørges om Grundsætninger af Erfaring, hvorpaa Calculen skulde anvendes.

Be-